買賣基金的奧秘

香港喇沙書院二年級學生： 李岱軒、梁俊彥、尹康彥
指導教師：羅沛強

一、 研究背景

現代社會發展迅速，在發達國家中，有多於半數的人口皆會透過購買股票或基金來賺取更多金錢及對抗通脹，因此我們必須要清楚了解購買股票或基金的最佳方法，從而獲得最大收益。

二、 研究內容

現有甲乙二人，甲每次皆購買一定數量的股票或基金，而乙則是以一定數量的金錢購買相同的股票或基金。

現設甲每次購買一手 (例如五百股) 的基金，乙則每次以二萬元購買同樣的基金。因爲市場上一定有波動，所以設甲和乙第一次買入價爲 a_1，第二次爲 a_2，… 第 n 次爲 a_n。

設甲的平均買入價爲 X，乙的平均買入價爲 Y。若 X＞Y，乙的方式較甲的划算；若 X＜Y，則甲的方法較乙的划算；若 X＝Y，則兩者一樣划算。

用數學方式來表達，

甲的購買方法：$X = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$

乙的購買方法：$Y = \dfrac{\$20000\, n}{\dfrac{\$20000}{a_1} + \dfrac{\$20000}{a_2} + \cdots + \dfrac{\$20000}{a_n}}$

$$= \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}$$

三、 研究實例

現設甲乙二人購買「盈富基金 (2800)」，共買了 26 次，每週一次 (5/7/2007 至 28/12/2007)。設甲的平均買入價爲 X，乙的平均買入價爲 Y。

設甲、乙二人都是以每週的收市價買入基金。

日期	6/7	13/7	20/7	27/7	3/8	10/8	17/8	24/8	31/8
買入價($)	22.85	23.4	23.55	22.9	22.85	22.05	20.8	23.3	24.35
日期	7/9	14/9	21/9	28/9	5/10	12/10	18/10	26/10	2/11
買入價($)	24.4	25.25	26.2	27.65	28.4	29.35	30	30.95	30.5
日期	9/11	16/11	23/11	30/11	7/12	14/12	21/12	28/12	(31/12)*
買入價($)	28.9	27.6	26.65	28.9	29.15	27.75	27.95	27.5	28.05

* 資料用作計算利潤百分比

$$X = \frac{\$\,(22.85 + 23.4 + 23.55 + \cdots + 27.5)}{26} = \frac{\$683.15}{26} = \$26.28$$

$$Y = \frac{26}{\frac{1}{22.85} + \frac{1}{23.4} + \frac{1}{23.55} + \cdots + \frac{1}{27.5}} = \$25.95$$

以甲的購買方法計算需投入資金 $=$ 500 x 26 x \$26.28 $=$ \$341640
(不計其他成本) (每手股數)

以乙的購買方法計算需投入資金 $=$ 26 x \$20000 $=$ \$520000
(每次投入 \$20000)

若以 2007 年 12 月 31 日收市價計算 (每股 \$28.05) ：

以甲的購買方法買入股票的盈(虧) $=$ 500 x 26 x \$28.05 - \$341640
$=$ \$23010

$$利潤百分比 = \frac{\$23010}{\$341640} \times 100\% = 6.74\%$$

$$以乙的購買方法買入股票的盈(虧) = \frac{\$\,520000}{\$\,25.95} \times \$28.05 - \$520000$$
$=$ \$42081

$$利潤百分比 = \frac{\$\,42081}{\$\,520000} \times 100\% = 8.09\%$$

∵ 8.09% ＞ 6.74%

∴ 以乙的方式買入股票較爲划算，以百分比計亦可取得較高利潤。

由上述例子，我們有以下的命題：每次以固定金額購買基金是比較划算，且利潤百分比亦較高。

四、 命題証明

方法(一) 當 n＝2：

$$X = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

(只考慮 n≧ 2 的情況，因爲當 n＝1，明顯地 X＝Y)

$$Y = \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}$$

$$\frac{X}{Y} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2}}{\frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}} = \frac{(a_1+a_2)(a_1+a_2)}{4a_1a_2} = \frac{a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2}{4a_1a_2}$$

$$= \frac{a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 + 4a_1a_2}{4a_1a_2} = \frac{(a_1 - a_2)^2}{4a_1a_2} + 1 \geqq 1$$

所以 X≧Y。

因此甲和乙均購買兩次時，乙的方法較划算。

(註：只有當 $a_1 = a_2$ 時，X ＝ Y，即甲、乙二人的方法一樣划算。)

當 n>2：

$$X = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$$Y = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

由 A.M. － G.M. 不等式得知

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} \geqq \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_1}*\frac{1}{a_2}*\ldots*\frac{1}{a_n}\right)} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}$$

由於 $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$，有 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}>0$ 及 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}>0$

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

再利用 A.M. － G.M. 不等式得知

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

所以有 $Y = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

$$\leqq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

$$= X$$

所以乙的方法仍比甲的划算。

(註：事實上，只有 $a_1=a_2=\cdots=a_n$時，才有 X＝Y。一般而言，由於金融市場會有波動，所以 a_i 不會全部相等。)

因此有 Y＜X，所以乙的方法較划算。

<u>方法(二)</u> 亦可以利用數學歸納法直接証明乙的購買方法較甲的划算，無須利用 A.M. - G.M.不等式。

<u>當 n=2 時</u>， X ≧ Y (參照 「証明方法 (一)」)

現假設 P_n 是正確的，即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

所以 $(a_1+a_2+\cdots+a_n)[\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}] \geqq n^2$ 成立

($a_1,a_2,\ldots,a_n$ 為正數)

現試証 P_{n+1} 亦成立，即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1} \geqq \frac{n+1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}}$$

亦即 $(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})[\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}] \geqq (n+1)^2$

証明：

$$\text{LHS} = (a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})[\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}]$$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})+1+$$

$$a_{n+1}(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})+\frac{1}{a_{n+1}}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$$

$$\geqq n^2+1+a_{n+1}(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})+\frac{1}{a_{n+1}}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$$

$$= n^2+1+\frac{a_{n+1}}{a_1}+\frac{a_{n+1}}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{a_1}{a_{n+1}}+\frac{a_2}{a_{n+1}}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$= n^2+1+(\frac{a_1}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_1})+(\frac{a_2}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_2})+\cdots+(\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_n})$$

$$= n^2 + 1 + \left(\frac{a_1^2 + a_{n+1}^2}{a_1a_{n+1}}\right) + \left(\frac{a_2^2 + a_{n+1}^2}{a_2a_{n+1}}\right) + \cdots + \left(\frac{a_n^2 + a_{n+1}^2}{a_na_{n+1}}\right)$$

(共 n 項)

由於 $(a_1 - a_{n+1})^2 \geqq 0$

$$a_1^2 + a_{n+1}^2 - 2a_1a_{n+1} \geqq 0$$

有 $\dfrac{a_1^2 + a_{n+1}^2}{a_1a_{n+1}} \geqq 2$

同理，有 $\dfrac{a_2^2 + a_{n+1}^2}{a_2a_{n+1}} \geqq 2, \cdots, \dfrac{a_n^2 + a_{n+1}^2}{a_na_{n+1}} \geqq 2$

$$\therefore \text{LHS} \geqq n^2 + 1 + \left(\frac{a_1^2 + a_{n+1}^2}{a_1a_{n+1}}\right) + \left(\frac{a_2^2 + a_{n+1}^2}{a_2a_{n+1}}\right) + \cdots + \left(\frac{a_n^2 + a_{n+1}^2}{a_na_{n+1}}\right)$$

(共 n 項)

$$\geqq n^2 + 1 + 2n$$

$$= (n + 1)^2$$

因此，P_{n+1} 也成立。

∴ 由數學歸納法原理所証，$\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$ $(n \geqq 2)$

亦即 X≧Y。而且只有當 $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ 時，才會有 X＝Y。

因此有 Y＜X，所以乙的方法總比甲的方法划算。

<u>利潤百分比的計算及比較</u>

設甲、乙買入基金的次數爲 n；A 爲計算利潤(虧蝕)時的收市價。

甲的成本 $= X \times n \times 500 = 500\,nX$

甲的利潤(虧蝕) $= 500\,nA - 500\,nX = 500\,n\,(A - X)$

甲的利潤百分比 $= \dfrac{500n(A-X)}{500nX} \times 100\% = 100(\dfrac{A}{X} - 1)\%$ (A < X 則爲虧蝕)

乙的成本 $= n \times \$20000$

乙的利潤(虧蝕) $= A\left(\dfrac{\$20000}{a_1} + \dfrac{\$20000}{a_2} + \ldots + \dfrac{\$20000}{a_n}\right) - \$20000n$

乙的利潤百分比 $= \dfrac{A\left(\dfrac{\$20000}{a_1} + \dfrac{\$20000}{a_2} + \ldots + \dfrac{\$20000}{a_n}\right) - \$20000n}{\$20000n} \times 100\%$

$= 100\,(\dfrac{A}{Y} - 1)\%$ (A < Y 則爲虧蝕)

乙的利潤百分比 − 甲的利潤百分比 $= 100(\dfrac{A}{Y} - 1)\% - 100(\dfrac{A}{X} - 1)\% = 100A\,(\dfrac{1}{Y} - \dfrac{1}{X})\%$

$= 100A\,(\dfrac{X-Y}{XY})\% \quad > 0$

因此乙的利潤一般都會比甲的高(或當虧蝕時比甲的少)。

五、　總結

經過研究和計算，我們發現不論股票或基金的價格如何波動，定期以固定金額購買股票或基金總是比定期購買固定數量的相同股票或基金划算。即使在有虧蝕的情況下，亦較划算。

購買股票及基金已成爲大部份人的興趣甚至「工作」。 若我們了解到當中的奧秘，用最佳的方式來投入資金，我們便有較大的機會從中獲利，成爲一個聰明的投資者。

六、　參考文獻

書籍:

1) 沈文選(主編)，奧賽經典-解題金鑰匙系列（高中數學），湖南師范大學出版社，2006/04

2) Lial-Hornsby-Schneider, Precalculus(3rd edition), Pearson Addison Wesley, 2005

3) 第五屆〝走進美妙的數學花園〞中國青少年數學論壇活動《優秀論文》香港數學教育普及協會

網站:

1) http://en.wikipedia.org/wiki/AM-GM_inequality

2) http://www.shkonline.com/eng/startpage_main.jhtml

3) http://www.hkex.com.hk/invest/index.asp?id=company/pricemenu_page_e.asp